Varianta 13

SUBIECTUL I

a) $i + i^2 + i^3 + ... + i^8 = 0.$
b) cos0+sin0 = 1.
c) $AB = 1$; $BC = 2$ $AC = \sqrt{5} \Rightarrow P = 3 + \sqrt{5}$.
d) $-2\vec{u} + \vec{v} = 3\vec{i} + \vec{j}.$
e) 2a+b=0.
f) $BC = 2$.

SUBIECTUL II

1.
a) $x \in (-\infty, 5]$.
b) $x \in [-3, 3]$.
c) $n = 48.$
d) $p = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.
e) M este parte stabilă dacă $\forall x, y \in M \Rightarrow x \circ y \in M$. Fie $x, y \in M \Rightarrow x > 2, y > 2$
$x \circ y > 2 \Leftrightarrow xy - 2x - 2y + 6 > 2 \Leftrightarrow (x-2)(y-2) > 0$ .Relație care este adevărată.

2.
a) $f'(x) = \frac{1}{x+1}$.
b) $\lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} = \frac{1}{3}.$
c) $f'(x) > 0, \forall x > -1 \Rightarrow f$ este crescătoare pe (-1, ∞).(aici am modificat)
d) $\lim_{x \to \infty} \frac{2x}{x+1} = 2.$
e) $\int_1^2 f'(x)dx = \ln\frac{3}{2}$.

SUBIECTUL III

a) $x_1 + x_2 = -1$ şi $x_1 x_2 = \frac{3}{2}.$
b) $f(x) - 2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{2} = 0.$

c) Din **b)** rezultă $f(x)=2\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{2}\geq\frac{5}{2};\forall x\in\mathbf{R}$.

d) $f=2(X-x_1)(X-x_2)\Rightarrow a=2$.

e) Din **d)** rezultă $2(2-x_1)(2-x_2)=f(2)=15$.

f) Fie $P(n):1^2+2^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, n∈**N*.**

$P(1):1^2=\frac{1\cdot2\cdot3}{6}$(A).

Presupunem $P(k)$ (A) si demonstrăm $P(k+1)$ (A), unde k≥1.

$P(k):1^2+2^2+...+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$ iar

$P(k+1):1^2+2^2+...+(k+1)^2=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$. Dar

$1^2+2^2+...+k^2+(k+1)^2\overset{P(k)}{=}\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$.

De unde $P(n)$ este adevărată , ∀n∈**N*.**

g) $f(1)+f(2)+...+f(n)=2\cdot\frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}+2\frac{n\cdot(n+1)}{2}+3n$

$=\frac{n(2n^2+6n+13)}{3}$.

SUBIECTUL IV

a) $f'(x)=e^x-1$.

b) $f'(x)\geq0,\forall x\geq0\Rightarrow f$ este crescătoare pe [0, ∞).

c) $g'(x)=e^x>0,\forall x\in\mathbf{R}$.

d) $f'(x)<0,\forall x<0\Rightarrow f$ este strict descrescătoare pe (-∞, 0), şi folosind **b)** avem că A(0,0) este un punct de minim global al funcției f .Rezultă că f(x)≥0; ∀x∈**R** , deci $e^x\geq x+1$; ∀x∈**R**.

e) Ecuația devine $4e^x=4e^3\Rightarrow x=3$.

f) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{2e^{2x}}\underset{l'H}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{g(x)}{4e^{2x}}\underset{l'H}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{g'(x)}{8e^{2x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{8e^x}=0$.

g) $\int_{-1}^{1}\frac{-1}{x^2+1}dx=-\frac{\pi}{2}$.